

Nome:

Cognome:

Matricola:

**Regole:** Voto minimo di ogni esercizio = 0. Esercizi 1-3: risposta giusta = 2, risposta non data = 0, risposta sbagliata = -1. Esercizi 4-5: punti 0-6.

**Esercizio 1** Sia  $f$  continua in  $[0, +\infty)$  tale che  $\int_0^{+\infty} f(x) dx = 1$  nel senso degli integrali impropri.

1. Esiste  $x_0 > 0$  tale che  $f(x) \geq \frac{1}{x}$  per  $x \in [x_0, +\infty)$ .  V  F
2. Esiste  $x_0 \geq 0$  tale che  $\int_{x_0}^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{3}$ .  V  F
3. La funzione  $g(x) = |f(x) - 3|$  è limitata.  V  F
4.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{3n^2} f(x) dx = 0$ .  V  F

**Esercizio 2** Sia  $f$  continua in  $\mathbb{R}$  e sia  $F(x) := \int_0^x f(t) dt$ .

1. Se  $x_0$  è un punto di minimo relativo per  $F$  allora  $f(x_0) = 0$ .  V  F
2. Se  $f(t) > 0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , allora  $F$  non è limitata.  V  F
3. Se  $F(1) = 1$  e  $f(t) \geq 1$  per ogni  $t \in [0, 1]$ , allora  $f(\frac{1}{2}) = 1$ .  V  F
4. Se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ , allora esiste  $t_0 \in \mathbb{R}$  tale che  $f(t) \geq 0$  per ogni  $t \geq t_0$ .  V  F

**Esercizio 3** Sia  $f \in C^1(\mathbb{R})$  una funzione 1-periodica non costante.

1.  $2f$  è Lipschitziana.  V  F
2.  $f' + 1$  è periodica.  V  F
3. Esiste finito  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .  V  F
4. Se  $\int_0^1 f(x) dx = 1$ , allora ogni primitiva di  $f$  è periodica.  V  F

**Esercizio 4** Sia

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{1 + \frac{|x|}{2}}.$$

Si determinino

1. il dominio, gli intervalli di continuità
2. gli intervalli di crescita e decrescenza
3. gli intervalli di concavità, convessità e eventuali asintoti

**Esercizio 5** 1. Determinare lo sviluppo di Taylor di  $f(x) = \cos(3 \sin(x - 1))$  al secondo ordine centrato in  $x_0 = 1$ ;

2. Determinare lo sviluppo di Taylor di  $f(x) = \sqrt{2(x - 1)^2 + 5}$  al secondo ordine centrato in  $x_0 = 1$ ;

3. Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(3 \sin(x - 1)) - 1}{\sqrt{2(x - 1)^2 + 5} - \sqrt{5}} e^{(x-1)^2}$$